* 1. **符号**

不可压缩Navier-Stokes方程：

字母在传统的流体力学中是作为流体的速度被使用的.为什么不是？这很难解释,但是它作为3D速度向量的三个成分是比较合适的,就像位置向量的三个成分通常标记为一样.

希腊字母代表流体密度.水的密度通常为,空气密度通常为,比例大约为700:1.

字母代表**压强**,单位面积上所承受的压力大小.

字母表示重力加速度,通常为.在本书中,我们约定坐标系的y轴朝上，x轴和z轴是水平的.我们应该把重力加速度添加到运动中，额外的控制力（使流体行为表现出我们期望的方式）也可能被添加到重力加速度中，我们将这些力都归纳为一个符号.更普遍的,人们将这些力称为**物体力(body forces)**，因为它们是作用在整个流体上的，而不仅仅是流体的表面.

希腊字母从技术上被称为**运动粘度(kinematic viscosity)**,是用来测量流体的粘性有多大.类似蜜糖一样的流体具有高粘度,类似汞的流体具有低粘度:它用来测量流体在流动时抵抗变形的程度(更直观地说,流体是有多么的难以搅拌).

* 1. **动量方程**

第一个微分方程(1.1)实际上是一个三合一的向量方程,一般称为**动量方程**.是牛顿方程的另一种变形.它告诉我们流体在外力的作用下是如何加速的.我们首先要将该方程分解,然后再研究二阶微分方程(1.2)——**不可压缩条件**.

首先想象一下我们使用粒子系统来模拟流体.每一个粒子代表一个流体微粒(a little blob of fluid),其质量为,体积为,速度为.为了及时整合系统，我们只需要找出作用在每个粒子上的力是什么：告诉们粒子是如何加速的,从中获得它的运动.我们用稍微奇怪的符号重写粒子的加速度(稍后我们将它与动量方程关联):

大写D的微分符号被称为**物质导数**(material derivative，后面将介绍).牛顿定律表达为:

.

哪些力作用在物体上呢？除了最简单的重力外,流体之间也存在相互作用的力.那么粒子之间是如何交互的呢?

第一种流体力是**压力**，高压区域推向低压区域.注意我们真正关心的是作用在粒子上的合力:例如,当粒子各个方向上的压力相等时,合力为0,没有加速度.当压力不平衡时,我们才能看到对粒子的影响,例如粒子一侧的压力大于另一侧,结果是粒子受到一个从高压区域指向低压区域的合力.我们用来表示负压力梯度(negative gradient of pressure，负号表示从高压区域到低压区域).我们需要对流体体积上求积分来获取压力值.一般乘以流体微粒体积来近似。

另一个流体力是**粘性力**(viscosity).粘性流体试图抵制变形.稍后我们将更深入地推导出这一点，但我们可以直观地理解成:一个试图让粒子速度达到附近粒子平均速度的力,即试图最小化流体与附近位置之间的速度差异.我们使用微分算子——拉普拉斯来表示粘性程度.这将给我们提供粘性力,一旦我们在流体粒子上求积分得到了它.我们就可以使用**动态粘度系数**(dynamic viscosity coefficient),用希腊字母来表示(动态意思是我们从中获取了一个力，运动粘度用来获取加速度).流体表面附近的粘度是变化的,第十章将详细介绍.

将上述所有力整合在一起,得到流体微粒的运动:

显然，当我们用有限个粒子来近似流体时会产生误差.如果将粒子的数目改成无穷大的，粒子的半径则趋近于0,质量和体积也必须趋近于0.那么上面的公式则没有意义了.这可以通过在方程两边除以体积，然后求极限来修正.

其中,两边再除以密度，然后移项，得到

为了使公式变得更简单,我们定义运动粘度为获得

我们几乎又得到了最初的动量方程! 实际上,使用物质导数的这种形式在计算机图形学中更为重要，并将指导我们进行数值求解.但是我们仍然想了解物质导数是什么以及它如何与动量方程的传统形式联系起来.为此,我们需要了解**拉格朗日**观点与**欧拉**观点之间的差异.

* 1. **拉格朗日和欧拉观点**

当我们考虑连续介质(如流体或可变形的固体)移动时,有两种方法来追踪这种运动：拉格朗日观点和欧拉的观点.

以法国数学家拉格朗日(Lagrange)命名的拉格朗日方法可能是你最熟悉的方法.它对待连续介质就像粒子系统一样.流体或固体中的每个点都被标记为单独的粒子,位置设为，速度设为.你甚至可以把每个粒子想象成流体的分子.这里没什么特别的!固体几乎总是以拉格朗日的方式来模拟——一组粒子的离散集合连接在一起组成网格.

欧拉方法以瑞士数学家欧拉命名,采取另一种方式来追踪流体.流体流经的区域是一个向量场，我们赋予向量场中的固定点一些属性,如密度,速度,温度等,然后观察流体在流动的过程中是如何影响这些属性的.例如，较冷的流体流过温暖的区域时，固定点上的温度将会下降.

以天气预报为例来考虑这两种观点的不同.在拉格朗日观点中,你处于一个气球中并随风漂浮,测量你周围流动空气的压力,温度和湿度等.在欧拉观点中,你被固定在地面上,测量流过的空气的压力,温度和湿度等.两种测量都可以创建一个天气条件变化的图像,但是由于它们以根本不同的方式测量变化率,因此图形可以完全不同.

在数值上,拉格朗日观点对应于一个粒子系统,欧拉观点对应于空间上不会改变的固定网格.

欧拉方法似乎不必要地复杂:为什么不坚持拉格朗日粒子系统?实际上,存在一些方案,例如涡旋(vortex)方法(参见[YUM86，GLG95，AN05，PK05])和平滑粒子流体动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics,SPH）(参见[DC96，MCG03，PTB + 03]).但是，即使这些方法在流体中依赖欧拉-导数(Eulerian-derived)公式计算物体力,在本书中,出于以下几个原因,我们也会在很大程度上坚持使用欧拉方法:

* 从欧拉观点来看,更容易分析空间导数,例如压力梯度和粘度项.
* 在固定的欧拉网格上,对这些空间导数进行数值逼近要比在任意移动的粒子云上更容易.

连接这两种观点的关键是物质导数。我们先从拉格朗日开始：粒子的位置为，速度为.让我们来研究一个称为的一般量:每个粒子都有一个值.(是粒子的一个属性,可能是密度,速度或温度等).特别的，函数告诉我们粒子在时间t，位置上的值:这是一个欧拉变量,因为它是一个关于空间的函数,而不是粒子的.那么对于某个粒子,当给定位置时,值是如何随时间变化的呢？只需要对整个函数取导即可（链式法则）：

这就是物质导数！

在学习物质导数之前我们先来回顾一下上述函数中两个项。第一项，表示在空间固定点上的变化有多块，这是一个欧拉测度.第二项，表示这个变化有多少是由于流经的流体的差异造成的（例如，温度变化是由于热空气被冷空气给替代了，不是因为空气分子发生了变化）。

物质导数的完整表达式：

显然在2D环境中，我们可以忽略和项。

我们继续讨论物理量、分子或粒子是如何在向量场中运动的.这被称为**对流[advection]**(有时被称为convection或transport,但它们都表示相同意思).对流方程就是物质导数等于0的情况:

这表示物质在周围移动但所处的拉格朗日观点不变.

* + 1. **例子**

让我们来研究一个一维情况的例子.我们使用温度代替.假设某一时刻的温度曲线是

也就是说，温度在原点为0并且向右会越来越暖和，在处会达到100摄氏度.现在,假设有稳定的风以速度吹动,也就是说,到处都是速度为的流体:

我们假设每个空气粒子的温度都没有变化——粒子仅仅是在移动.因此,以拉格朗日的观点衡量事物的物质导数表示变化是为零:

如果我们将上式展开,得到

也就是在空间中固定点，温度的变化率为.如果风停了,,没有任何变化.如果风以速度吹向右边,固定点的温度将以-10的速率下降.如果风以速度吹向左边,则固定点的温度将以20的速率上升. 因此，即使拉格朗日导数为零，在这种情况下，欧拉导数也可以是任意值，具体取决于流动的速度和方向.

* + 1. **对流向量**

向量函数的物质导数：逐分量求导.例如一个颜色向量为,它的物质导数为：

尽管符号可能没有严格意义(难道向量的梯度是矩阵?向量和矩阵之间的点积是什么意思)，如果我们分割向量成标量分量，则不难指出它是什么.

让我们对速度本身做同样的事情，除了出现在两个位置——流体运动的速度场和对流的流体量[fluid quantity]之外,实际上没有其它不同.有时称这种现象为**自对流[self-advection]**以强调速度以两个不同的角色出现在同一公式中，但其工作原理与颜色完全相同。 因此，仅通过复制和粘贴，即可得出速度的对流：

或者如果您想深入了解偏导数的细节

* 1. **不可压缩性**

真实的流体,甚至像水这样的液体也会改变其体积.实际上,这就是声波的本质:流体体积、密度和压力的扰动.您可能曾经被教导,液体和气体之间的区别在于气体会改变其体积,但液体不会改变,但这并不是真的:否则,您将无法在水下听到声音!

但是，流体通常不会改变其体积。 即使强大的水泵，也几乎根本不可能改变水的体积。 除非将空气粘在泵中，否则它的体积也不会发生太大变化，或者处理诸如声音爆破和爆炸波这样的极端情况。 研究流体在这些情况下的行为通常称为可压缩流。 模拟非常复杂且昂贵，而且除了声学以外，它并没有明显地进入到日常生活中—甚至声波在体积上的扰动很小，对流体在宏观水平上的移动影响很小，以至于 它们实际上与动画无关.

这意味着在动画中，我们通常可以将所有液体（包括液体和气体）视为不可压缩的，这意味着它们的体积不会改变.这在数学上是什么意思?附录B中再次有更严格的解释,但现在我们可以快速草拟一个论点.

设任意形状的流体体积为,边界曲面为(这些都是传统符号).我们可以对其边界速度的向量成分[normal component]求取积分来测量流体体积的变化:

如果表面沿切向移动,则不会影响体积;如果它在向外/向内移动,则体积会成比例地增加/减少.对于不可压缩的流体,体积最好保持恒定,即此变化率必须为零:

现在我们可以使用散度定理将其更改为体积积分.基本上,这是微积分基本定理的多维版本：如果对导数进行积分,则相当于在积分的范围内对原始函数进行求值(如果需要复习，请参阅附录A的向量积分).在这种情况下,我们得到

现在,这是神奇的部分:对于任何Ω,任何流体区域,该方程式都应成立.独立于积分区域而积分为零的唯一连续函数本身是零.因此,在任意位置,被积函数都必须为零:

这就是*不可压缩条件*，这是不可压缩的Navier-Stokes方程的另一部分.

满足不可压缩条件的向量场场由于显而易见的原因被称为无散度.模拟不可压缩流体的棘手部分之一是确保速度场保持无散度.这就是压强的来源.

想象压强的一种方法是——保持速度无散度所需的力.如果您熟悉动态约束,则可以将不可压缩条件视为一个约束,而将压强场视为满足零虚拟功原理约束所需的拉格朗日乘数. 如果您不熟悉动态约束,请不要担心.让我们确切地导出压强是什么.

压强仅显示在动量方程中,我们想以某种方式将其与速度的散度联系起来.因此,让我们来考虑动量方程两边的散度:

我们可以将第一项中的微分顺序更改为散度的时间导数:

如果不可压缩性条件始终成立,则最好为零.重新排列公式(1.3),得出压强方程:

这与我们的数值模拟并不完全相关,但是值得一看,因为当离散化时,从观察体积变化的速度到压强方程, 我们将执行几乎完全相同的步骤.

* 1. **降低粘度**

在一些情况下,粘度力是非常重要的:例如模拟蜂蜜或非常小规模的流体流动.但在大多数情况下,黏度起着次要作用,因此我们忽略粘度力:方程越简单越好.实际上,大多数数值方法用于模拟流体不可避免地引入可以物理上的误差,这些误差重新解释为粘度(稍后会有更多的介绍)——所以即使我们在方程中降低粘度,我们仍然会看到类似的东西.事实上,计算流体动力学的一大挑战就是尽可能多的避免虚假粘性误差.因此本书的其余部分,除了关注高粘度流体或甚至第10章变化的流体以外,我们将假定粘度为0.

无粘性的Navier-Stokes方程称为**欧拉方程[Euler equations]**，没有粘性的理想流体被称为**无粘性的[inviscid]**.那么简化后的动量方程为：

我们将主要使用的是这些方程.不要忘记它们是一个近似，并不是说水和空气实际上是理想的无粘性流体 - 它的粘性对数值模拟的贡献通常被模拟中的其他误差所掩盖，因此不值得建模.

* 1. **边界条件**

大多数数值模拟流体的“乐趣”是从边界条件的正确性来获得的.那么流体在边界发生了什么呢？

现在，让我们把注意力放在两种边界条件上,**固体墙[solid walls]**和**自由表面[free surface]**.

固体墙边界是流体与固体接触的地方.这可以用速度来表示：流体是无法进入到固体中，所以速度的法向部分必须为0：

当固体自身运动时，情况会变得稍微复杂点.一般的，我们需要流体速度的法向分量与固体速度的法向分量想匹配，所以相对速度的法向分量为0：

在所方程中，是固体边界上的法向量.这有时被称为**不粘[no-stick]**条件,因为只限制速度法向分量，我们允许流体沿着切线方向自由滑动.这是一个非常重要的点需要记忆:流体的切线速度可能与固体的切线速度一点关系都没有.

这就是的速度的作用：那么固体墙上的压强是怎样的?我们又要回想一下压强的定义“无论如何都要保持流体的不可压缩性。”我们还有再加上一句“并且强制满足固体墙的边界条件。”项在动量方程中甚至作用在边界上，所以压强控制固体墙上，显然存在着某个东西与有关，这就是众所周知的压力法向导数：。

这就是固体墙关于**无粘性[inviscid]**流体的全部内容了.如果我们要考虑粘性力,情况会变得稍微复杂.在这种情况下，固体的粘性通常会影响流体速度的切向分量,从而迫使其匹配.这就是所谓的**无滑[no-slip]**边界条件

或者如果固体在运动时,

对于粘度非常低但非零的流体，当观察固体附近流体的微观细节时，这实际上比不粘条件更准确，但是粘性的效果和无粘条件只能在固体附近的细微边界层中看到，而流体的其他地方看起来似乎存在无粘条件。边界层是比较难的研究领域，但是相对于流体模拟，这块区域影响较小。

当你思考一滴水从固体上落下时，可能会对边界条件感到困惑：当水滴的速度法向分量在固体表面上为0时，事实上它是如何从固体上分离的。从某个层面上来说分离并不是连续介质模型的属性：这是一个分子尺度过程并不能被分离掉。一般的，我们要么从模拟方法中的数值误差免费得到近似真实的分离，或者随便得到一个不真实的结果。Batty等人[BBB07]介绍了一种更加“宏观”的分离模型，该模型满足一个不等式，允许流体离开墙面但不允许进入，不等式如下：

这种情况的物理和算法影响尚不清楚，因此尽管这是研究的主要方向，但我们不会在本书中深入介绍.

有时固体墙可能是个通风口或排水沟,流体能从中流过.在这种情况下,我们显然希望与墙面的速度不同.此时该点处的流体速度因该根据情况调整.

我们关注的另一个边界条件是自由表面.这是我们停止对流体建模的地方.假设我们模拟水在周围飞溅，那么与固体墙不接触的水面就是自由表面.在这种情况下存在另一种流体——空气，但是我们不模拟空气.由于空气比水轻700倍,因此无论如何都不会对水产生较大影响(有一些值得注意的例外，例如气泡).因此,我们简化建模过程，可以将空气表示为恒定气压的区域.实际上,由于仅存在压强(不可压缩流)之间的差异,我们可以将气压设置为任意常数:零是最方便的.因此,自由表面处的压强,我们不以任何额外方式控制速度.

自由表面的另一种情况是我们要在一个大的区域中模拟一块体积较小的流体：例如，在空气中模拟烟雾。我们无法模拟地球上整个大气层，所以只能用一个网格覆盖“感兴趣”的区域。之前模拟区域的边界依旧存在，但我们不跟踪它；我们允许流体自由进出区域，所以本质上还要考虑自由表面,,即使没有可见表面。

自由表面出现的另一种情况是,我们尝试模拟更大范围内的一部分流体:例如,模拟露天烟雾.显然我们无法承受模拟整个地球大气的能力,因此我们将制作一个覆盖我们“关注”区域的网格.(我在这里先声明要模拟烟雾，您需要模拟附近的无烟空气，不仅是烟雾的自身区域-但是，我们可以避免模拟距离太远的流体.)越过模拟区域的边界，流体继续流动，我们允许流体根据需要进入和离开该区域，因此很自然地将其视为自由表面，，即使实际上并没有可见的表面.

关于自由表面的最有一个衷告：对于小体量流体，表面张力非常重要。在分子层面上，表面张力存在是因为不同类型的分子之间吸引力的强度不同。例如，水分子受到其它水分子的吸引力比受到空气分子的大得多，所以表面上的水分子会尽可能的将水体包围起来与空气分离。从几何角度来看，物理化学家建立了这样一个模型：一个力尽量最小化（流体的）表面面积，或者试图减小（流体的）表面平均曲率。你可以把第一个想法（最小化表面积）解释为张力不断试图缩小表面，因此名称表面张力;第二种方法使用平均曲率可能会更方便一些。（稍后，在第8章中，我们将讨论如何实际测量平均曲率，以及它的意义。）总之，该模型是两种流体间的压强跳变，与平均曲率成正比：

表示压强跳变,即,测量的水面一侧和空气一侧的压强差，是表面张力系数，可以通过查表得到（水和空气在室温下大概为），是平均曲率，单位为.自由表面与水的压强跳跃(假设空气压强为0)：

自由表面确实存在一个主要问题:气泡立即消失(内部没有压力阻止它们失去体积).尽管空气比水轻得多,因此通常无法将大量动量传递给水,但空气仍具有不可压缩性约束:水中的气泡在很大程度上保持了其体积.对自由表面中的气泡建模将允许气破碎和消失.要处理这种情况,您需要将气泡粒子添加到自由表面流中，或者更一般地说是对空气和水的模拟(称为两相流，因为涉及到两相或不同类型的流体).